

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ
 ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2025
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

Προτεινόμενες απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 93

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

A3. α) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 95)

β) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 92)

γ) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 23)

δ) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 30)

ε) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 40)

A4. α) $(c)' = 0$ **β)** $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε τον παρακάτω συμπληρωμένο πίνακα, μαζί με την απαιτούμενη στήλη για τον υπολογισμό της μέσης τιμής.

X_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$X_i \cdot v_i$
0	10	20	10	0
1	15	30	25	15
2	11	22	36	22
3	8	16	44	24
4	6	12	50	24
Σύνολο	50	100		85

Εἶναι $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 + 40 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 10$

Για τις σχετικές επί τοις εκατό συχνότητες χρησιμοποιείται ο τύπος $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100\%$ ενώ για τις αθροιστικές συχνότητες έχουμε

$N_1 = v_1, N_2 = N_1 + v_2$ κ.ο.κ

B2. Εἶναι $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{85}{50} = 1,7$ ώρες

B3. Οι ώρες είναι στον πίνακα διαταγμένες σε αύξουσα σειρά και το πλήθος είναι $v=50$, δηλαδή έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων. Η διάμεσος είναι ίση με το ημιάθροισμα των δυο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή είναι $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$ ώρα.

Επειδή είναι $N_2 = 25$ προκύπτει ότι η 25^η παρατήρηση είναι η τελευταία παρατήρηση με τιμή 1 και η 26^η παρατήρηση είναι η πρώτη από τις παρατηρήσεις με τιμή 2.

B4. α.

Αφού είναι $F_4\% = f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$ προκύπτει ότι το 88% των υπαλλήλων εργάζονται το πολύ 3 ώρες υπερωριακά.

Εναλλακτικά έχουμε $F_4\% = 100\% - f_5\% = 100\% - 12\% = 88\%$.

B4. β.

Έστω y_i οι υπερωρίες των υπαλλήλων μετά την αύξηση τους κατά 4 ώρες. Τότε έχουμε

$$y_i = x_i + 4, \quad i=1,2,3,4,5$$

Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή στη σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου έχουμε

$$\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7 \text{ ώρες}$$

ΘΕΜΑ Γ

Είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Γ1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + \alpha)' = -6x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονotonίας.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-		+		-
$f(x)$					

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

Γ2. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ με τιμή $f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + \alpha = \alpha$

και τοπικό μέγιστο για $x = 2$ με τιμή $f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + \alpha = -16 + 24 + \alpha = 8 + \alpha$

$$\text{Ισχύει } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow f(0) + f(2) = -16 \Leftrightarrow \alpha + 8 + \alpha = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12$$

Γ3. Για $\alpha = -12$ είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = -6x^2 + 12x$

Έχουμε $f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -8$ και $f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 6$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(1) = 6$.

Άρα έχουμε $\varepsilon: y = 6x + \beta$. Το σημείο $M(1, f(1))$, δηλαδή το $M(1, -8)$, ανήκει στην ευθεία ε

οπότε $y = 6x + \beta \xRightarrow[x=1]{y=f(1)} f(1) = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -8 = 6 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$.

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 6x - 14$.

Γ4. Αν $x \in [2, +\infty)$ τότε λόγω της μονοτονίας της στο συγκεκριμένο διάστημα έχουμε :

$$x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$ δηλαδή είναι $f'(1) = 0$ από τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο

$$x_0 = 1. \text{ Ακόμα είναι } f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2\lambda x + 7 = x^2 + 2\lambda x + 7$$

Τότε έχουμε $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 1^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$

Δ2. Για $\lambda = -4$ έχουμε $f'(x) = x^2 - 8x + 7$. Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 7$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας.

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 7]$.

Δ3. Οι αριθμοί $2020, 2025 \in [7, +\infty)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Τότε έχουμε:

$$2020 < 2025 \xrightarrow{f} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0 \quad (1)$$

Οι αριθμοί $\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7]$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε έχουμε:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \xrightarrow{f} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) (2) προκύπτει ότι $A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$

Δ4. Είναι $f'(x) = x^2 - 8x + 7$ και $f'(x) = (x^2 - 8x + 7)' = 2x - 8$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$$

Για την παραγοντοποίηση του $x^2 - 10x + 16$ βρίσκουμε πως έχει ρίζες $x = 2, x = 8$ οπότε $x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$



Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{3}^2} = \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = \\&= (2-8)(\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -6(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}\end{aligned}$$